Indicar **claramente** apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar **debidamente justificadas**. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Apellido: …………………………………..Nombres:………………………………………………

Padrón:………………………

1. *a)* Demostrar que el campo $\vec{f}(x,y)=\left(\frac{4x}{2x^2+y^2},\frac{2y}{2x^2+y^2}\right)$ definido en $D=R^2-\{\bar{0}\}$ admite función potencial $\phi:D\to R$ y hallar Ø tal que Ø(0,1)=4
   b) Calcular, mediante una integral de línea, el área de la región plana cuya frontera es la curva de nivel 4 de Ø.

2. Sea la superficie $\Sigma=\{(x,y,z)\in\Re^3 : y+z=1\ ;\ y\geq 0\ ;\ z\geq 0\ ;\ 0\leq x\leq 2\}$ y el campo $\vec{f}:R^3\to R^3; C^2(R^3)$
   Sabiendo que $rot.\vec{f}(x,y,z)=(1-3x,y,2z)$, hallar la circulación del campo $\vec{f}$ a lo largo de la curva frontera de ∑.
   Indicar en un gráfico el sentido de circulación utilizada.

3. Sea la función definida por:
$$f(x,y)=\begin{cases}3-(x^2+y^2) & si\ \ x^2+y^2\leq 1\\ 2 & si\ \ x^2+y^2>1\end{cases}$$
   a) Mostrar que f es continua.
   b) Hallar, si existe, la derivada parcial de f respecto de y en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   c) Analizar la diferenciabilidad de f en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. Sea la integral expresada en coordenadas esféricas:
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}}\rho^3 sen(\varphi)d\rho\, d\varphi\, d\theta$$
   a) Describir la región de integración.
   b) Resolver la integral en el sistema de coordenadas más conveniente.

5. Sean los campos vectoriales $\vec{f}(x,y,z)=(2x\ ,-2yz, z^2-xy)$ y $\vec{g}(x,y,z)=(k_1x\ ,\ k_2y\ ,\ k_3z)$ con k_1, k_2 y k_3 ε R
   Sean las superficies S_1: $x^2+(y-4)^2+z^2=1$ y S_2: $x^2+(y+6)^2+z^2=¼$
   Encontrar k_1, k_2 y k_3 de modo que los flujos exteriores de $\vec{f}$ a través de S_1 y de $\vec{g}$ a través de S_2 sean iguales y que el producto $k_1.k_2.k_3$ sea máximo local

1. ***a) Demostrar que el campo*** $\vec{f}(x,y)=\left(\dfrac{4x}{2x^2+y^2},\dfrac{2y}{2x^2+y^2}\right)$ ***definido en*** $D=R^2-\{\vec{0}\}$ ***admite función potencial*** $\phi:D\to R$ ***y hallar Ø tal que Ø(0,1)=4***

Como f no es conservativo (porque el dominio NO es un abierto simplemente conexo) existe una función potencial siempre y cuando la curva en la que quiero circular "no tenga relación con el punto en conflicto" (ejemplo: circunferencias con centro en el origen o unión de segmentos que pasen por el origen y luego comparando con otras circulaciones que no tocan el origen).

Para evaluar si admite Función Potencial observo si su matriz jacobiana es simétrica (condición necesaria) y luego evalúo si el dominio es el mismo que el de f.

Sea $\vec{f}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$; $P,Q:D\to R$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix} \quad ;\ para\ \ que\ \ sea\ \ simétrica: \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)&=\frac{-8xy}{(2x^2+y^2)^2}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)&=\frac{-8xy}{(2x^2+y^2)^2}\end{aligned}\right\rangle = \to Matriz\ \ Jacobiana\ simétrica$$

Las derivadas parciales son continuas en el mismo dominio de f, por lo que, al integrarlas, el dominio será el mismo que el del campo vectorial f. Por esto puedo decir que admite función potencial (pues tienen el mismo dominio)

<u>Hallo la función potencial</u>:

$$\vec{f}_{(x,y)}=\left(P_{(x,y)},Q_{(x,y)}\right)=\nabla\varphi_{(x,y)}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)\to\begin{cases}P_{(x,y)}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\\ Q_{(x,y)}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\dfrac{4x}{2x^2+y^2} \quad (1)\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{2x^2+y^2} \quad (2)\end{cases}$$

$$(1)\ \xrightarrow[m.a.m.]{Integro\ X}\ \underbrace{\varphi_{(x,y)}=\ln(\overbrace{2x^2+y^2}^{>0})+\delta_{(y)}}$$

$\downarrow$ *derivo respecto de Y* $\downarrow$

$$\overbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=\frac{2y}{2x^2+y^2}+\delta'_{(y)}}\overset{(2)}{=}\frac{2y}{2x^2+y^2}\ \to\delta'_{(y)}=0\ \to\ \delta_{(y)}=K\ ;\ \ (K\in\Re)$$

$$\varphi_{(x,y)}=\ln(2x^2+y^2)+K\quad (K\in\Re\ \ ,\ \ 2x^2+y^2>0)$$

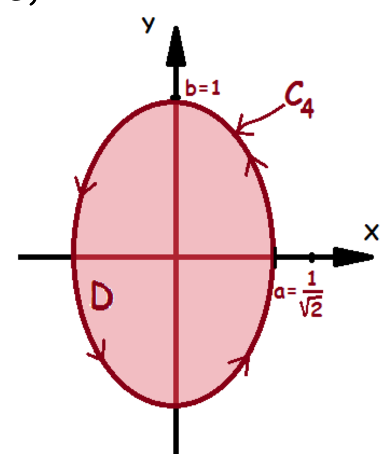
Uso el dato del enunciado: Ø(0,1)=4

Y observo que el dom (Ø)=dom(f)

$$\varphi_{(0,1)}=\ln(2(0)^2+(1)^2)+K=4\to K=4\Rightarrow \boxed{\varphi_{(x,y)}=\ln(2x^2+y^2)+4}$$

b) Calcular, mediante una integral de línea, el área de la región plana cuya frontera es la curva de nivel 4 de Ø.

<u>Analizo la región plana que mencionan en el enunciado</u>: (la voy a llamar D)



Curva de nivel 4 de Ø: $C_4 = \{(x,y)\in\Re^2 : \varphi_{(x,y)} = 4\}$

$$\varphi_{(x,y)} = \ln(2x^2+y^2)+4 = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln(2x^2+y^2) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{2x^2+y^2=1}_{elipse}$$

$$\frac{x^2}{\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{a^2}} + \frac{y^2}{\underbrace{1}_{b^2}} = 1 \qquad \rightarrow D = \{(x,y)\in\Re^2 : 2x^2+y^2 \le 1\}$$

<u>Parametrizo la elipse C_4</u>:

$$elipses\ en\ general: \quad \vec{\gamma}_{(t)} = (a.\cos(t), b.sen(t)) \ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$C_4 : \vec{\gamma}_{(t)} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}.\cos(t), .sen(t)\right) \ ;\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$\vec{\gamma}\,'_{(t)} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}.sen(t), .\cos(t)\right)$$

<u>Hallo el área de D</u>:

Como veo que D es una región compacta cuyo borde C es cerrada y suave por trozos, puedo calcular el área utilizando el teorema de Green, para lo que necesito una $\vec{g}:\Re^2 \rightarrow \Re^2 \in C^1(\Re^2)$; $\vec{g}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ $tal\ que$ $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 1$

$$\vec{g}(x,y) = (-y, 0)\ cumple\ \ pues \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -1 \end{array} \right\rangle \rightarrow \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) = 0-(-1) = 1$$

Se verificaron las hipótesis, por lo tanto:

$$\oint_{C_4^+} \vec{g}.d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{C_4^+} \vec{g}.d\vec{l} = \oint_{C_4^+} \left(\vec{g}_{(\vec{\gamma}(t))}.\vec{\gamma}\,'_{(t)}\right)dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-sen(t)\ ,\ 0)}_{\vec{g}(\vec{\gamma}(t))}.\underbrace{(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} sen(t)\ ,\ \cos(t))}_{\vec{\gamma}\,'(t)} dt =$$

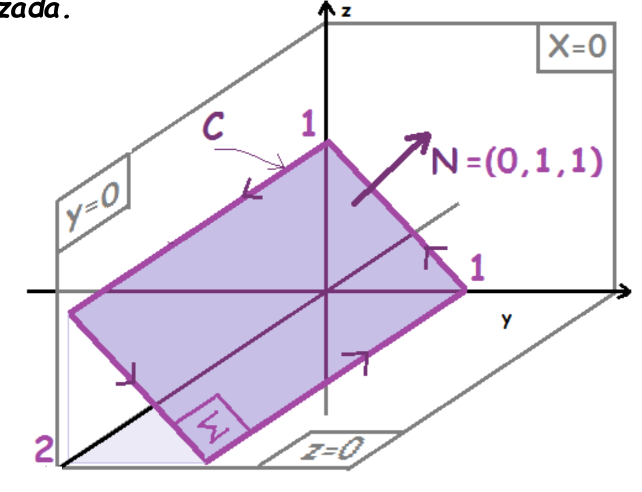
$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{\sqrt{2}} sen^2(t).dt = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\pi = \oint_{C_4^+} \vec{g}.d\vec{l}$$

$$\boxed{Área = \oint_{C_4^+} \vec{g}.d\vec{l} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\pi}$$

2. ***Sea la superficie*** $\Sigma = \{(x,y,z) \in \Re^3 : y+z=1\,;\; y \geq 0\,;\; z \geq 0\,;\; 0 \leq x \leq 2\}$ ***y el campo*** $\vec{f}: R^3 \to R^3; C^2(R^3)$

Sabiendo que $rot.\vec{f}(x,y,z) = (1-3x, y, 2z)$, ***hallar la circulación del campo*** $\vec{f}$ ***a lo largo de la curva frontera de Σ.***

Indicar en un gráfico el sentido de circulación utilizada.



Analizo la forma de Σ:

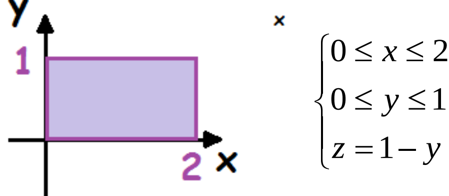
y + z = 1 → plano cuya normal es (0,1,1) y pasa por (0,0,1)

x ≥ 0, y ≥ 0, z ≥ 0 → Primer octante

x ≤ 2 → Puntos por debajo del plano x=2

Proyección de Σ sobre el plano xy:

y + z = 1 → z = 1 - y



$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ z = 1-y \end{cases}$$

Como tengo que hallar la circulación de un campo vectorial de $R^3 \to R^3$, verifico si se cumplen las hipótesis del Teorema de Stokes:

- ✓ Sea Σ una superficie suave y orientable.
- ✓ C (borde de Σ) es una curva suave a trozos y orientada positivamente.
- ✓ $\vec{f}: \Re^3 \to \Re^3 con\ \vec{f} \in C^2(\Re^3)\ (enunciado) \to \vec{f} \in C^1(\Re^3)$

Como se cumplen las hipótesis, puedo calcular la circulación utilizando el Teorema de Stokes:

$$\oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = \iint_\Sigma rot.\vec{f}.d\bar{s} = \iint_\Sigma rot.\vec{f}.\breve{n}.ds$$

$$\oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = \iint_\Sigma (1-3x, y, 2z).\frac{(0,1,1)}{\|\breve{n}\|}.ds = \iint_\Sigma (y+2z)\frac{1}{\|\breve{n}\|}.\overbrace{ds}^{\|\breve{n}\|.dx.dy} \underset{z=1-y}{=} \iint_\Sigma (2-y)\frac{1}{\|\breve{n}\|}.\|\breve{n}\|.dx.dy =$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (2-y).dy.dx = \int_0^2 \left(2y - \tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx = \frac{3}{2}\int_0^2 dx = 3$$

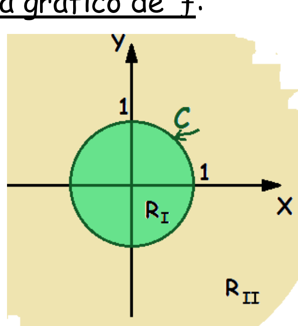
$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{f}.d\bar{l} = 3}$$

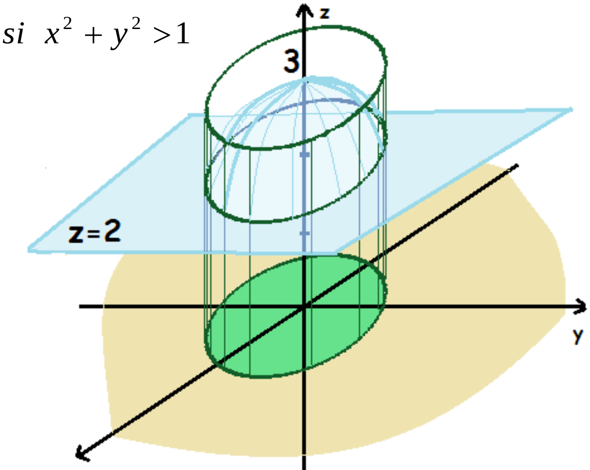
3. ***Sea la función definida por:***

$$f(x,y)=\begin{cases}3-(x^2+y^2) & si\ \ x^2+y^2\le 1\\ 2 & si\ \ x^2+y^2>1\end{cases}$$

a) Mostrar que f es continua.

<u>Analizo dom(f) y la gráfico de f</u>:





<u>*Región I*</u> → $x^2 + y^2 \le 1$ → disco radio 1 centrado en el origen
f(x,y) = 3 – $(x^2 + y^2)$ → paraboloide

<u>*Región II*</u> → $x^2 + y^2 > 1$ → puntos "afuera" del disco
f(x,y) = 2 → plano z=2

Por el gráfico ya se puede observar que la función es continua (no tiene "saltos")

<u>Analizo la continuidad</u>:

- <u>*Región I*</u> → f CONTINUA, pues f(x,y) = 3 – $(x^2 + y^2)$ es un polinomio → f ε C^∞ (R^3)
- <u>*Región II*</u> → f CONTINUA, pues f(x,y) = 2 es un polinomio (constante) → f ε C^∞ (R^3)
- <u>*Circunferencia radio 1 centrada en el origen*</u>

  Por la forma, trabajo en coordenadas polares:

  $$\begin{cases} x = r.\cos(t) \\ y = r.sen(t) \quad 0 \le t \le 2\pi \quad ; \quad r \in R_{\ge 0}\end{cases}$$

$$\bar{\gamma}(r,t)=(r.\cos(t),r.sen(t)) \rightarrow f(\bar{\gamma}(r,t))=3-r^2 \ \ ; \ borde \Rightarrow \bar{\gamma}(1,t)=(\cos(t).sen(y))$$

<u>Analizo si se cumple que</u>:
$$\begin{cases} 1)\ \exists\ f(\bar{\gamma}(1,t)) \\ 2)\ \exists \lim\limits_{(r,t)\to(1,t)} f(\bar{\gamma}(r,t))=L \ \ ; \ L\in\Re \\ 3)\ f(\bar{\gamma}(1,t))=L \end{cases}$$

$$1)\ f(\bar{\gamma}(1,t))=3-1^2=2 \rightarrow \exists\ y\ vale\ 2$$

$$2)\ \lim_{(r,t)\to(1,t)} f(\bar{\gamma}(r,t)) \rightarrow lo\ analizo\ por\ \text{Región } I\ \ y\ \text{Región } II$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(r,t)\to(1,t)\\(r,t)\in R_I \to f(\bar{\gamma}(r,t))=3-r^2}} f(\bar{\gamma}(r,t))=3-1=2 \\ \lim\limits_{\substack{(r,t)\to(1,t)\\(r,t)\in R_{II} \to f(\bar{\gamma}(r,t))=2}} f(\bar{\gamma}(r,t))=2 \end{array}\right\rangle \rightarrow \exists\ y\ son\ iguales$$

$$3)\ \underbrace{f(\bar{\gamma}(1,t))}_{2}=\underbrace{\lim_{(r,t)\to(1,t)} f(\bar{\gamma}(r,t))}_{2} \rightarrow definición\ de\ continuidad$$

Como se cumplen las tres condiciones, entonces, f es continua en R^2

b) Hallar, si existe, la derivada parcial de ƒ respecto de y en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Como es una función partida, voy a calcular la derivada parcial por definición:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-h(0,1)\right)-f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}+h\right)-\overbrace{f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}^{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}+h\right)-2}{h}=$$

Tengo que estudiar la aproximación por las distintas regiones y ver si el límite vale lo mismo aproximándose por Región I o Región II.

<u>Región I</u>: $f(x,y) = 3 - (x^2 + y^2)$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_I}}\frac{f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}+h\right)-2}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_I}}\frac{\left[3-\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+h\right)^2\right)\right]-2}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_I}}\frac{\left[3-\left(\tfrac{1}{4}+\left(\tfrac{3}{4}+\sqrt{3}h+h^2\right)\right)\right]-2}{h}=$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_I}}\frac{3-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4}-\sqrt{3}h-h^2-2}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_I}}\frac{-\sqrt{3}.h-h^2}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_I}}\frac{-h\left(\sqrt{3}-h\right)}{h}=\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_I}}-\sqrt{3}+\overset{\to 0}{h}=-\sqrt{3}}$$

<u>Región II</u>: $f(x,y) = 2$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_{II}}}\frac{f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}+h\right)-2}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_{II}}}\frac{2-2}{h}=\boxed{\lim_{\substack{h\to 0\\ x\ R_{II}}}\frac{0}{h}=0}$$

Son distintos

Como los límites aproximándose por la Región I y por la Región II son distintos, entonces puedo afirmar que:

$$\boxed{\nexists\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

c) Analizar la diferenciabiliadad de ƒ en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Como NO existe la derivada de ƒ con respecto a ' y ' entonces,

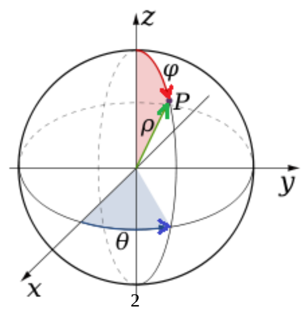
puedo afirmar que ƒ NO es diferenciable en el punto indicado

4. ***Sea la integral expresada en coordenadas esféricas:***

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}}\rho^3 sen(\varphi)d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

a) Describir la región de integración.

La parametrización en coordenadas esféricas es: $\overline{\delta}_{(\rho,\varphi,\theta)}=(\ \rho.sen(\varphi)\cos(\theta)\ ,\ \rho.sen(\varphi)sen(\theta)\ ,\ \rho.\cos(\varphi))$



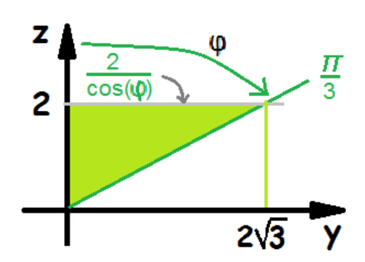
θ → ángulo de rotación sobre el plano xy

φ → ángulo de rotación sobre el plano yz
(o sea, cómo va "cayendo" el eje z)

ρ → es la variación del radio

Como $\int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}}d\rho \to 0\le\rho\le\frac{2}{\cos(\varphi)}\to \lim.sup.\Rightarrow \overbrace{\rho.\cos(\varphi)}^{z}=2\to z=2$

Proyecto sobre el plano yz para ver la forma
(después sólo queda rotarlo 2π sobre el plano xy)



Al girar ese triángulo sobre el eje z, se va formando un semicono positivo con vértice en (0,0,0) (y su interior)

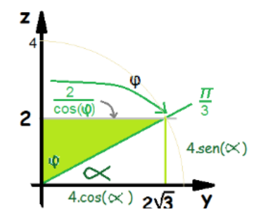
Parametrización de un semicono positivo en coordenadas polares:

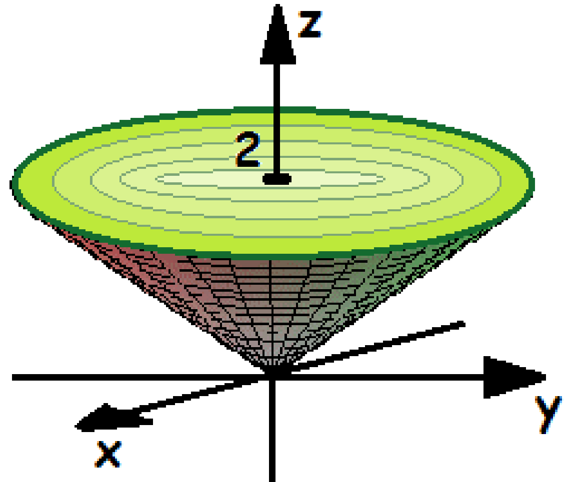
ρ máximo se obtiene en $\varphi=\frac{\pi}{3}\to\rho\ \ máx.=\frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=4$

$z=k.r\ \ ;\ k,r\in\Re_{\ge0}$

$\varphi=\frac{\pi}{3}\to\alpha=\frac{\pi}{6}\to y=4.\cos(\frac{\pi}{6})=2\sqrt{3}\equiv r\ \ máximo$

$\to\ z=k.r\ \to\ 2=k.2\sqrt{3}\ \to k=\frac{1}{\sqrt{3}}$





La superficie del cono se da (en coordenadas cartesianas) por $z=\sqrt{\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)}$

Sea W la región de integración:

$$W=\left\{(x,y,z)\in\Re^3:\sqrt{\tfrac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)}\le z\le 2\right\}$$

b) Resolver la integral en el sistema de coordenadas más conveniente.

Como W queda dentro del cilindro de $r = 2\sqrt{3}$ centrado en el eje z, entonces hago un cambio de coordenadas a cilíndricas:

$$\overline{\beta}_{(r,t,z)} = \left(r.\cos(t), r.sen(t), z \right) \begin{cases} 0 \le r \le 2\sqrt{3} \\ 0 \le t \le 2\pi \\ \dfrac{r}{\sqrt{3}} \le z \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}} \rho^3 sen(\varphi) d\rho\, d\varphi\, d\theta \overset{\substack{cambio \\ de \\ variables \\ a\ CARTESIANA}}{\overbrace{=}} \iiint_W \overbrace{\rho^3}^{\rho} sen(\varphi) . \overbrace{\frac{1}{\rho^2 sen(\varphi)}}^{JACOBIANO} dx.dy.dz =$$

$$= \underbrace{\iiint_W \overbrace{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}^{\rho} dx.dy.dz}_{HORRIBLE\ \ PARA\ \ INTEGRAR} \overset{\substack{cambio \\ de \\ variables \\ a\ CILÍNDRICAS}}{\overbrace{=}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2} \sqrt{r^2 + z^2} . \overset{JACOBIANO}{\overbrace{r}}\ dz.dr.dt}_{TAMBIÉN\ QUEDA\ HORRIBLE\ PARA\ INTEGRAR}$$

Por lo tanto, el mejor sistema de coordenadas para integrar es en esféricas:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}} \rho^3 sen(\varphi) d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{\frac{2}{\cos(\varphi)}} sen(\varphi) d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4} . \frac{16}{\cos^4(\varphi)} sen(\varphi) d\varphi\, d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen(\varphi)}{\cos^4(\varphi)} d\varphi\, d\theta \overset{CALCULADORA}{\overbrace{=}} 4 \int_0^{2\pi} \frac{7}{3} d\theta =$$

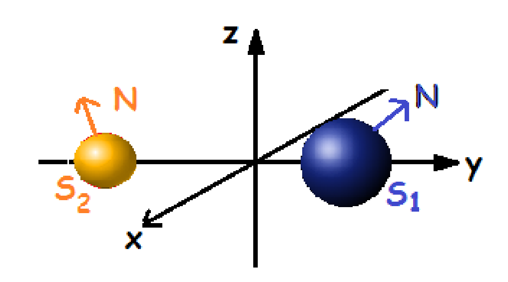
$$= \frac{28}{3} . 2\pi = \frac{56}{3} \pi = I$$

$$\boxed{\frac{56}{3} \pi = I}$$

5. *Sean los campos vectoriales* $\vec{f}(x,y,z)=\left(2x\,,-2yz,z^2-xy\right)$ ***y*** $\vec{g}(x,y,z)=\left(k_1x\,,\,k_2y\,,\,k_3z\right)$ ***con*** k_1, k_2 ***y*** $k_3 \in R$

Sean las superficies S_1: $x^2+(y-4)^2+z^2=1$ ***y*** S_2: $x^2+(y+6)^2+z^2=\frac{1}{4}$

Encontrar k_1, k_2 ***y*** k_3 ***de modo que los flujos exteriores de*** $\vec{f}$ ***a través de*** S_1 ***y de*** $\vec{g}$ ***a través de*** S_2 ***sean iguales y que el producto*** $k_1.k_2.k_3$ ***sea máximo local***



Analizo las superficies:

S_1: $x^2+(y-4)^2+z^2=1$ → esfera radio 1 centrada en (0,4,0)

S_2: $x^2+(y+6)^2+z^2=\frac{1}{4}$ → esfera radio $\frac{1}{2}$ centrada en (0,-6,0)

Sea W_1 y W_2 los sólidos contenidos por S_1 y S_2 respectivamente.

- ✓ W_1 y W_2 son dos regiones de R^3 cuyas fronteras son S_1 y S_2 están orientadas hacia el exterior.
- ✓ $\vec{f}(x,y,z)$ y $\vec{g}(x,y,z)$ están definidas en $R^3 \to R^3$, $C^\infty(R^3)$ pues sus componentes son polinomios, por lo tanto $\vec{f}(x,y,z)\in C^1\left(\Re^3\right)$, $\vec{g}(x,y,z)\in C^1\left(\Re^3\right)$

Se cumplen las hipótesis del Teorema de Gauss, por lo que:

$$\iint_{S_1}\vec{f}.d\vec{s}=\iiint_{W_1}div.\vec{f}\,dVol \qquad y \qquad \iint_{S_2}\vec{g}.d\vec{s}=\iiint_{W_2}div.\vec{g}\,dVol$$

Hallo las divergencias:

Sea $\vec{f}._{(x,y,z)}=\left(F_{1(x,y,z)},F_{2(x,y,z)},F_{3(x,y,z)}\right)$ y $\vec{g}._{(x,y,z)}=\left(G_{1(x,y,z)},G_{2(x,y,z)},G_{3(x,y,z)}\right)$

$$div.\vec{f}._{(x,y,z)}=\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x.y.z)+\frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)=2-2z+2z=2=div.\vec{f}._{(x,y,z)}$$

$$div.\vec{g}._{(x,y,z)}=\frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial G_2}{\partial y}(x.y.z)+\frac{\partial G_3}{\partial z}(x,y,z)=k_1+k_2+k_3=div.\vec{g}._{(x,y,z)}$$

Las dos divergencias son reales, por lo tanto, el flujo es proporcional al volumen. Al ser proporcional del volumen puedo "desplazar" las superficies, centrándolas y haciendo más fácil la parametrización y su integración, o puedo usar alguna "formulita" conocida para calcular el volumen.

$$\iint_{S_1}\vec{f}.d\vec{s}=\iiint_{W_1}2.dVol=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho^2 sen(\varphi).d\rho.d\varphi.d\theta \overset{Vol=\frac{4\pi.r^3}{3}}{=} \frac{8}{3}\pi=\iint_{S_1}\vec{f}.d\vec{s}$$

$$\iint_{S_2}\vec{g}.d\vec{s}=\iiint_{W_2}(k_1+k_2+k_3)dVol=(k_1+k_2+k_3)\underbrace{\iiint_{W_2}dVol}_{Vol=\frac{4\pi.r^3}{3}}=(k_1+k_2+k_3)\frac{\pi}{6}=\iint_{S_2}\vec{g}.d\vec{s}$$

$$\iint_{S_1}\vec{f}.d\vec{s}=\iint_{S_2}\vec{g}.d\vec{s}\to\frac{8}{3}\pi=(k_1+k_2+k_3)\frac{\pi}{6}\to\frac{8.6}{3}=(k_1+k_2+k_3)\to(k_1+k_2+k_3)=16$$

$k_1=16-k_2-k_3$

Analizo el dato de que $k_1.k_2.k_3$ sea máximo local.

Sea $h(a,b)=\overbrace{(16-a-b)}^{k_1}.\overbrace{a}^{k_2}.\overbrace{b}^{k_3}=16.a.b-a^2.b-a.b^2$

Busco los valores de a y b en los que se anula el gradiente

$$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial a}(a,b)=16.b-2.a.b-b^2=0 \quad (1)\rightarrow b=0\ ;\ 2.a.b=16.b-b^2\\ \dfrac{\partial h}{\partial b}(a,b)=16.a-2.a.b-a^2=0 \quad (2)\rightarrow a=0\ ;\ 2.a.b=16.a-a^2\end{cases}\right\}\rightarrow 16.b-b^2=16.a-a^2$$

$$\left.\begin{cases} b=0\xrightarrow{(2)}16.a-a^2=0\rightarrow 16.a=a^2\rightarrow \left\langle\begin{array}{l}a=0\\a=16\end{array}\right.\\ a=0\xrightarrow{(1)}16.b-b^2=0\rightarrow 16.b=b^2\rightarrow \left\langle\begin{array}{l}b=0\\b=16\end{array}\right.\\ a=b\xrightarrow{(1)}16.a--2a^2-a^2=0\rightarrow \left\langle\begin{array}{l}a=0=b\\a=\frac{16}{3}=b\end{array}\right.\end{cases}\right\}\rightarrow \begin{array}{l}PC_1=(0,0)\\PC_2=(16,0)\\PC_3=(0,16)\\PC_4=\left(\frac{16}{3},\frac{16}{3}\right)\end{array}$$

Ahora analizo si son máximos locales mediante el hessiano:

$$H(a,b)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 h}{\partial aa}(a,b) & \dfrac{\partial^2 h}{\partial ab}(a,b)\\ \dfrac{\partial^2 h}{\partial ba}(a,b) & \dfrac{\partial^2 h}{\partial bb}(a,b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2b & (16-2a-2b)\\(16-2a-2b) & -2a\end{vmatrix}=4ab-(16-2a-2b)^2$$

Especializo en los puntos críticos hallados y observo en qué puntos H(a,b) > 0 y $\dfrac{\partial^2 h}{\partial aa}(a,b)<0$

(condiciones para que los puntos sean máximos locales)

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial aa}(a,b)=-2b<0\rightarrow PC_1=(0,0)\,,PC_2=(16,0)$ *se descartan*

$PC_3=(0,16)$ → H = 4ab - $(16\text{-}2a\text{-}2b)^2$ → H = - 256 < 0 → se descarta

$PC_4=\left(\frac{16}{3},\frac{16}{3}\right)$ → H = 4ab - $(16\text{-}2a\text{-}2b)^2$ → $H=\dfrac{256}{3}>0\wedge\dfrac{\partial^2 h}{\partial aa}(\tfrac{16}{3},\tfrac{16}{3})<0\rightarrow$ *máximo local*

Se encuentra un máximo en $(a,b)=(\overbrace{\tfrac{16}{3}}^{k_2},\underbrace{\tfrac{16}{3}}_{k_3})$ → $k_1=16-k_2-k_3=16-\dfrac{16}{3}-\dfrac{16}{3}=\boxed{\dfrac{16}{3}=k_1}$

Por lo tanto, los k_1, k_2 y k_3 que cumplen lo pedido es

$$\boxed{k_1=k_2=k_3=\frac{16}{3}}$$

¡¡¡ Éxitos en los exámenes !!!

"La imaginación es más importante que el conocimiento". (Albert Einstein)

(si encuentran algún error, algo no está muy claro o está mal explicado, por favor escríbanme un mail a sylvina64@gmail.com así lo corrijo)